Métodos Numéricos

São métodos que podem ser usados para a obtenção de soluções numéricas para problemas, quando por uma qualquer razão não podemos ou não desejamos usar métodos analíticos.

Os métodos numéricos conduzem a soluções aproximadas de um modelo ou sistema exacto.

Porquê usar métodos numéricos?

- Existem situações em que é preferível um método numérico ao método analítico ainda que este exista, por exemplo se a solução para um problema envolve muitos cálculos.
- A maior parte dos problemas concretos são, em geral, complexos e envolvem fenómenos não lineares pelo que é comum encontrarmo-nos numa situação em que os nossos conhecimentos de matemática não são suficientes para a descoberta de uma solução para um problema real..
- Quando os dados do problema são os de uma tabela de valores, qualquer tratamento (a sua diferenciação ou integração por exemplo) terá de ser feito através de um método numérico

Modelos aproximados e soluções aproximadas

Modelo matemático real demasiado complexo para ser tratado analiticamente

- Alterar e simplificar o modelo por forma a torná-lo tratável, e assim obter uma solução exacta de um sistema ou modelo aproximado.

  Tal solução é suspeita pelo facto de ocorrerem simplificações do modelo. Terão de se fazer várias experiências para ver se as simplificações são compatíveis com os dados experimentais.

- Usar método numéricos e assim produzir soluções aproximadas para o sistema real/exacto.

  Tais soluções são apenas aproximações que podem ser melhoradas à custa de esforço computacional.

Capítulo 1: ERROS

Quase todos os cálculos envolvem erros. Em cálculo numérico lidamos quase exclusivamente com valores aproximados daí que não podemos usar métodos numéricos e ignorar a existência de erros.

- **Tipos de erros num processo de cálculo**:
  - » Erros inerentes:

    Em geral, o modelo matemático não traduz exactamente a realidade (é muitas vezes necessário impor certas restrições idealistas)

    Os dados e parâmetros dum problema são muitas vezes resultados de medições experimentais e, portanto, afectados de alguma incerteza.

    A impossibilidade de representar exactamente certas constantes matemáticas.

  - » Erros do método:

    Resultam do uso de fórmulas que nos dão valores aproximados e não exactos.

  - » Erro computacional:

    É devido ao facto de o computador usar apenas um número finito de dígitos para representar os números reais.

Erro, erro absoluto e erro relativo

Seja $\bar{x}$ o valor aproximado do valor exacto x.

O erro de $\bar{x}$ em relação a *x* define-se por

$$e_x = x - \bar{x}$$

$$|e_x| = |x - \bar{x}|$$ erro absoluto de $\bar{x}$

Se $x \neq 0$, $|\delta_x| = \left|\frac{x - \bar{x}}{x}\right|$ erro relativo de $\bar{x}$

Ao produto $100|\delta_x|$, expresso em percentagem, chama-se percentagem de erro.

Representação dos números

- **Base decimal**

Um número real qualquer não nulo pode ser representado no sistema decimal por

$$\sigma(b_m b_{m-1} ... b_1 b_0 . a_1 a_2 ... a_n ...)_{10}$$

com $\sigma \in \{+,-\}$, $0 \le b_i \le 9$, $b_m \neq 0$, $0 \le a_i \le 9$

que representa o valor real

$$\sigma(b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + ... + b_1 10^1 + b_0 10^0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + ... + a_n 10^{-n} + ...)$$

Representação dos números

- Sistemas de vírgula flutuante

Um número de vírgula flutuante na base β e com n dígitos é um número que pode ser escrito na forma

$$x = \sigma(0.a_1 a_2 \ldots a_n)_\beta \times \beta^t$$

onde $\sigma \in \{+,-\}$, $0 \leq a_i \leq \beta-1$, $i=1,2,\ldots n$, $t_1 \leq t \leq t_2$, sendo t, t_1, t_2 inteiros.

Arredondamentos

- Consideremos o número real $x = \sigma(0.a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots)_\beta \times \beta^t$ onde $a_1 \neq 0$ e β é uma base par.

Representar este número em vírgula flutuante com n dígitos

- arredondamento por corte:

$$fl(x)=\sigma(0.a_1 a_2 \ldots a_n)_\beta \times \beta^t$$

- arredondamento simétrico:

$$fl(x)=\sigma(0.a_1 a_2 \ldots a_n)_\beta \times \beta^t, \quad 0 \leq a_{n+1} < \beta/2$$

$$fl(x)=\sigma(0.a_1 a_2 \ldots a_n)_\beta \times \beta^t, \quad \beta/2 \leq a_{n+1} < \beta$$

Erros de arredondamento

➢ Sistema decimal:
Seja $x = \sigma(0.a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots) \times 10^t$ e suponhamos que $fl(x)$ é obtido

» por arredondamento simétrico (com n dígitos):

$$|x - fl(x)| \leq 0.5 \times 10^{t-n}$$

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{1-n}$$

» por arredondamento por corte (com n dígitos):

$$|x - fl(x)| \leq 10^{t-n}$$

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq 10^{1-n}$$

Algarismos significativos

➢ Seja $\bar{x} = \sigma(0.a_1 a_2 \ldots a_n) \times 10^t$ uma aproximação de x em vírgula flutuante com n dígitos.

Diz-se que o algarismo a_i de $\bar{x}$ é ***significativo*** se

$$|e_x| = |x - \bar{x}| \leq 0.5 \times 10^{t-i}$$

➢ Se $|e_x| = |x - \bar{x}| \leq 0.5 \times 10^{t-n}$ os n algarismos de $\bar{x}$ são significativos.

➢

Propagação dos erros

- $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$$e_f = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m) e_{x_i}, \quad f'_{x_i} \text{ derivadas parciais de } f \text{ em ordem a } x_i$$

$$\delta_f = \sum_{i=1}^{m} p_{x_i} \delta_{x_i}, \quad p_{x_i} = \frac{x_i f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

Mau condicionamento e estabilidade numérica

- Um problema diz-se *bem condicionado* se pequenos erros nos dados produzem pequenos erros no resultado ou de forma equivalente, se uma pequena mudança nos dados produz uma pequena mudança no resultado. Caso contrário o problema é *mal condicionado*.

- Se um dos números de condição associados às variáveis x_i em valor absoluto for grande então o problema é mal condicionado. Se forem todos pequenos então o problema é bem condicionado.

$$\text{(erro total) } \delta_z = \sum_{i=1}^{m} p_{x_i} \delta_{x_i} + \sum_{k=1}^{s} q_k \delta_{ar_k}, \quad q_s = 1$$

(os pesos q_1, q_2,...,q_{k-1} dependem do algoritmo escolhido)

- Um algoritmo diz-se numericamente instável se pelo menos um dos pesos p_{xi} ou q_k for grande em valor absoluto. Caso contrário, o algoritmo diz-se numericamente estável.