



**Provas de Acesso ao Ensino Superior  
Para Maiores de 23 Anos**

**Candidatura de 2012**

**Exame de Matemática**

---

Tempo para realização da prova: 2 horas  
Tolerância: 30 minutos

---

**Material necessário:**

- Material de escrita.
- Máquina de calcular científica (não gráfica).

**A prova é constituída por dois grupos, I e II.**

- O grupo I inclui 7 questões de escolha múltipla.
  - Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correta.
  - Se apresentar mais do que uma resposta ou se a resposta for ilegível, a questão será anulada.
  - Não apresente cálculos nem justificações.
  - Escreva na folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera correta.
- O grupo II inclui 4 questões de resposta aberta.
  - Nas questões deste grupo apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efetuar e todas as justificações necessárias.

**Cotações**

Grupo I ..... 70

Cada resposta certa .....10

Grupo II .....130

1. ....35

1.1.....10

1.2.....25

2. ....35

2.1.....5

2.2.....10

2.3.....10

2.4.....10

3. ....25

3.1.....10

3.2.....15

4. ....35

4.1.....5

4.2.....15

4.3.....15

## Formulário

### Área de figuras planas:

- Triângulo:  $\frac{Base \times Altura}{2}$
- Losango:  $\frac{Diagonal\ Maior \times Diagonal\ Menor}{2}$
- Trapézio:  $\frac{Base\ Maior + Base\ Menor}{2} \times Altura$
- Círculo:  $\pi r^2$ ;  $r$  raio

### Perímetro de figuras planas:

- Circunferência:  $2\pi r$ ;  $r$  raio

### Volumes:

- Paralelepípedo retângulo:  $Área\ da\ base \times Altura$
- Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ Base \times Altura$
- Cone:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ Base \times Altura$
- Esfera:  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ;  $r$  raio

### Progressões:

Termo de ordem  $n$  de uma progressão de razão  $r$ :

- Aritmética:  $u_n = u_1 + (n - 1)r$
- Geométrica:  $u_n = u_1 r^{n-1}$

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão de termo geral  $u_n$  e razão  $r$ :

- Aritmética:  $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- Geométrica:  $S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} (r \neq 1)$

### Regras de Derivação:

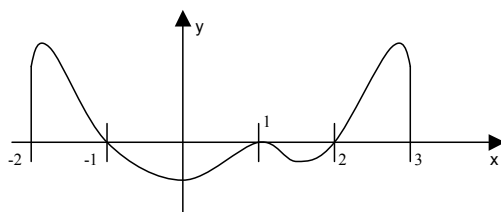
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

### Razões Trigonométricas de Ângulos Agudos:

$\alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$0^\circ$	0	1	0
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^\circ$	1	0	-

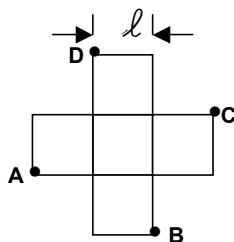
## Grupo I

1. Seja  $I = [-2, 3]$  e a figura abaixo o gráfico da função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .



Então:

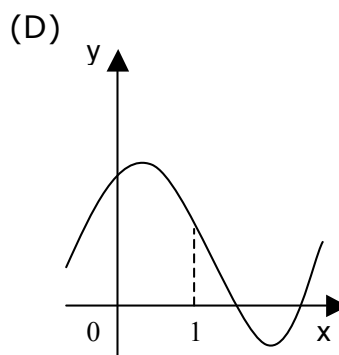
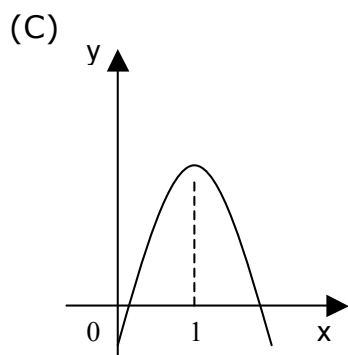
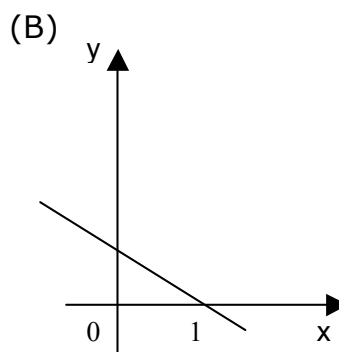
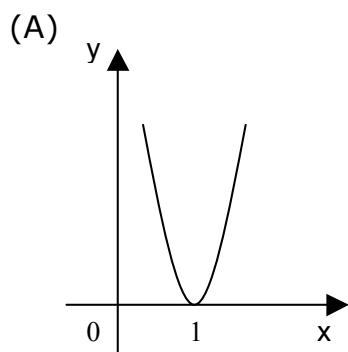
- (A)  $f(x) = x^4$ , para todo  $x \in I$ ;  
 (B)  $f(a)f(-1) - f(b)f(1) + f(c)f(2) = 0$ , para quaisquer  $a, b, c \in I$ ;  
 (C)  $f(x) \leq 0$ , para todo  $x \in [-2, 0]$ ;  
 (D) se  $a, b \in I$  e  $a < b$ , então  $f(a) < f(b)$ .
2. Cinco quadrados de lado  $\ell$  formam a cruz da seguinte figura



A área do quadrilátero convexo de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  é:

- (A)  $2\sqrt{5} \ell^2$                       (B)  $4 \ell^2$   
 (C)  $4\sqrt{3} \ell^2$                       (D)  $5 \ell^2$
3. Num determinado país da Europa, um *designer* de uma empresa, durante um ano, teve três aumentos de ordenado. Um em janeiro, de 10%, outro em maio, de 5% e o outro em setembro de 3%. Nesse ano o aumento do ordenado do referido *designer*, arredondado às unidades em percentagem, foi de:
- (A) 18%                      (B) 20%  
 (C) 17%                      (D) 19%
4. Indique qual das expressões seguintes é, para qualquer número  $b$  superior a 1, igual a  $b^{2+\log_b 3}$ .
- (A)  $3b^2$                       (B)  $2b^3$   
 (C)  $3 + b^2$                       (D)  $2 + b^3$

5. Seja  $g$  uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abscissa 1. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da segunda derivada de  $g$ ?



6. De uma função  $f$  sabe-se que  $f(x) = -\frac{1}{4}f''(x)$ , para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função  $f$ ?

- (A)  $4x^2$                       (B)  $2 \cos x$   
 (C)  $e^{2x}$                       (D)  $\sin(2x)$

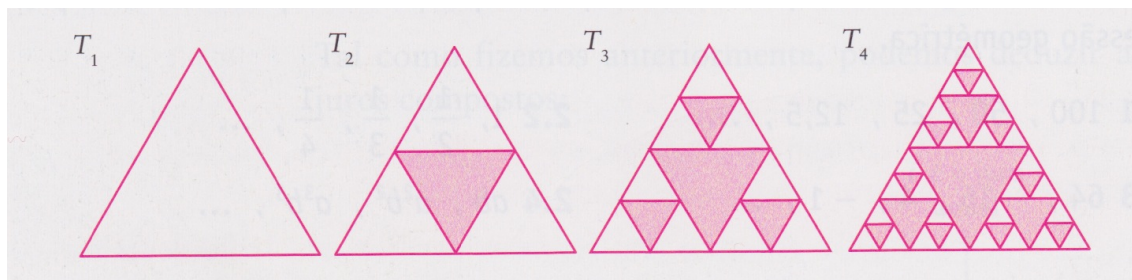
7. Simplificando-se a expressão  $\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{2}{9}}$  obtém-se:

- (A)  $\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$                       (B)  $\sqrt{\frac{77}{18}}$   
 (C)  $\frac{7\sqrt{2}}{6}$                       (D)  $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

---

## Grupo II

1. Seja  $T_1$  um triângulo equilátero de lado  $l$  unidades de medida. Construa-se  $T_2$  a partir de  $T_1$ , unindo os pontos médios dos lados de  $T_1$  e pintando o triângulo central.

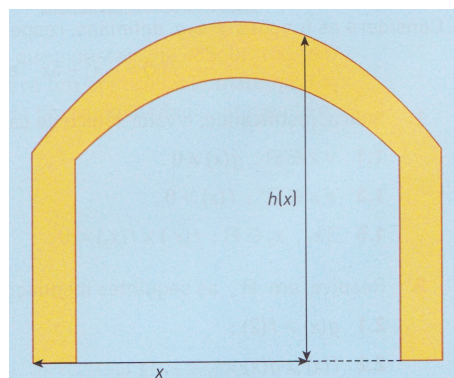


Construa-se  $T_n$  a partir de  $T_{n-1}$  ( $n > 2$ ) repetindo, em cada um dos triângulos que ficam em branco, a construção indicada.

- 1.1. Quantos triângulos brancos há em  $T_5$ ?
- 1.2. Sendo  $x_n$  o número de triângulos brancos em  $T_n$  e  $a_n$  a área de **cada um desses** triângulos brancos, mostre que as sucessões  $(x_n)$  e  $(a_n)$  são progressões geométricas e apresente os respectivos termos gerais.
2. Na entrada de um túnel, existe um arco assente em dois pilares de igual altura. A altura do arco a  $x$  metros de distância do pilar da esquerda é dada, em metros, por:

$$h(x) = -\frac{1}{8}(x-4)^2 + 7$$

- 2.1. Mostre que  $h(0) = 5$  e interprete o resultado.
- 2.2. Indique a altura máxima do arco.
- 2.3. Determine a largura do túnel.
- 2.4. A que distância do pilar da esquerda a altura do arco é superior a 6,5 m?

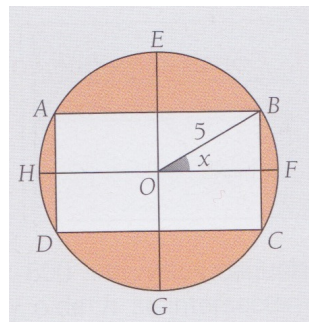


3. A figura abaixo representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio. O canteiro tem uma zona retangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura.

Os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do retângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.

Na figura estão também assinalados:

- dois diâmetros da circunferência,  $[EG]$  e  $[HF]$ , que contêm os pontos médios dos lados do retângulo;
- o centro  $O$  da circunferência;
- o ângulo  $BOF$ , de amplitude  $x$ , com  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

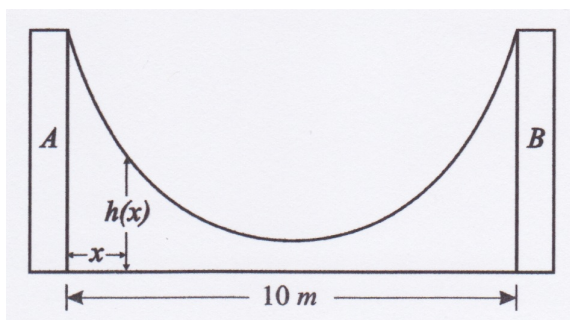


3.1. Calcule as dimensões da zona retangular quando  $x = \frac{\pi}{6}$ .

3.2. Mostre que a área (em  $m^2$ ) da zona relvada é dada, em função de  $x$ , por:

$$A(x) = 25\pi - 50 \sin(2x).$$

4. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes,  $A$  e  $B$ , distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função  $h$  definida por  $h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11)$ , onde  $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ . Admita que  $h(x)$  é a altura, em metros, do ponto da rampa situado  $x$  metros à direita da parede  $A$ .

- 4.1. Determine a altura da parede  $A$ . Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

**Nota:** se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 4.2. Sem recorrer à calculadora, estude a função  $h$  quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

- 4.3. Mostre, analiticamente, que  $h(5 - x) = h(5 + x)$ . Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

**FIM**