Provas de Acesso ao Ensino Superior

Para Maiores de 23 Anos

Candidatura de 2010

Exame de Matemática

Tempo para a realização da prova: 2 horas
Tolerância: 30 minutos

Material necessário:

- Material de escrita.
- Máquina de calcular científica (não gráfica).

A prova é constituída por dois grupos, I e II.

- O grupo I inclui 7 questões de escolha múltipla.
  - Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correcta.
  - Se apresentar mais do que uma resposta ou se a resposta for ilegível, a questão será anulada.
  - Não apresente cálculos nem justificações.
  - Escreva na folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera correcta.
- O grupo II inclui 4 questões de resposta aberta.
  - Nas questões deste grupo apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efectuar e todas as justificações necessárias.

Cotações

Grupo I 70

Cada resposta certa 10

Grupo II 130

1. 35
1.1.....................15
1.2.....................10
1.3.....................10
2. 30
2.1......................5
2.2.....................10
2.3.....................15

3. 30
3.1.....................10
3.2.....................20
4. 35
4.1......................5
4.2.....................20
4.3.....................10

Formulário

Área de figuras planas:

- Triângulo: $\frac{Base \times Altura}{2}$
- Losango: $\frac{Diagonal\ Maior \times Diagonal\ Menor}{2}$
- Trapézio: $\frac{Base\ Maior + Base\ Menor}{2} \times Altura$
- Círculo: πr^2; r raio

Perímetro de figuras planas:

- Circunferência: $2\pi r$; r raio

Volumes:

- Paralelepípedo rectângulo: $\acute{A}rea\ da\ base \times Altura$
- Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \acute{A}rea\ \ da\ Base \times Altura$
- Cone: $\frac{1}{3} \times \acute{A}rea\ \ da\ Base \times Altura$
- Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$; r raio

Progressões:

Termo de ordem n de uma progressão de razão r:

- Aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)r$
- Geométrica: $a_n = a_1 r^{n-1}$

Regras de Derivação:

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
- $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
- $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Razões Trigonométricas de Ângulos Agudos:

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0º	0	1	0
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90º	1	0	-

Grupo I

1. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ cuja derivada, g', é definida por:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g é decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$.

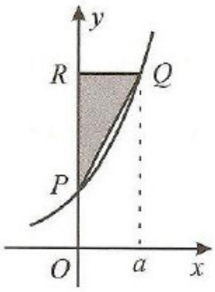
(B) A função g é crescente em $]-\infty,0[$ e decrescente em $]0,+\infty[$.

(C) A função g é crescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$.

(D) A função g é decrescente em $]-\infty,0[$ e crescente em $]0,+\infty[$.

2. Na figura está parte da representação gráfica da função f definida por $f(x) = e^x$. Está também representado um triângulo $[PRQ]$ rectângulo em R.

O ponto Q, de abcissa a, pertence ao gráfico de f. O ponto P é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy.



Indique qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PRQ]$.

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{ae^a+a}{2}$

(C) $\frac{ae^a}{2}$ (D) $\frac{ae^a-a}{2}$

3. Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.

Considere a função h definida por

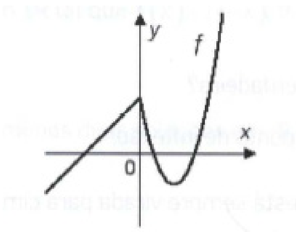
$$h(x) = f(x) + \ln(f(x)).$$

O valor de $h'(1)$ é:

(A) 3 (B) 4

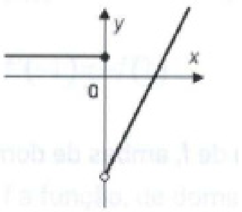
(C) 2 (D) $2 + \ln 2$

4. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

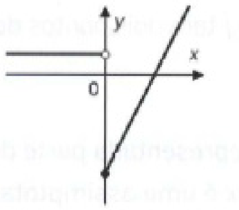


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função f', derivada de f?

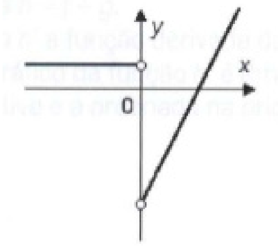
(A)



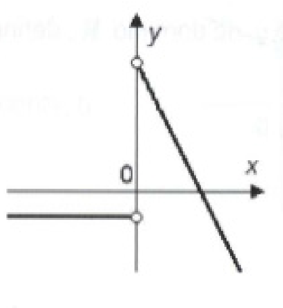
(B)



(C)



(D)



5. O conjunto dos valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a função definida por

$$f(x) = x^2 + 2x + k$$

não admite zeros é:

(A) $]-\infty, 1[$ (B) $]-\infty, 0[$

(C) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (D) $]1, +\infty[$

6. Sejam f e g funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = e^x \quad \text{e} \quad g(x) = e^{2x+3}$$

Os gráficos de f e g intersectam-se num ponto.

A **ordenada** deste ponto é:

(A) e^3 (B) $\frac{1}{e^3}$

(C) $\frac{1}{e^4}$ (D) $\frac{2}{e^3}$

7. O valor de x que torna a sucessão $(x+1, x, x+2, \cdots)$ uma progressão geométrica é

(A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$

(C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Grupo II

1. Numa determinada auto-estrada, com dois troços, os telefones de emergência existentes estão colocados de forma a que a distância entre dois telefones consecutivos é constante.

Existem 18 telefones instalados no primeiro troço, o primeiro no quilómetro 3 e o último no 88.

1.1. Determine a distância, em Km, entre cada telefone.

1.2. Determine o número total de telefones colocados em toda a auto-estrada, sabendo que no segundo troço o último telefone foi colocado no quilómetro 148.

1.3. Haverá algum telefone colocado no quilómetro 100? Justifique.

2. Foi lançado um balão de um ponto da montanha do Pico .

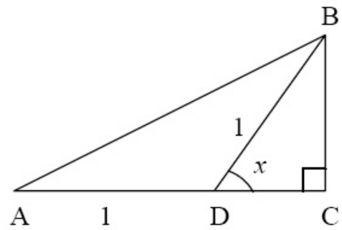
A evolução da altura do balão (em metros), desde o momento do seu lançamento, é dada por: $h(t) = -50t^2 + 200t + 150$, onde t é expresso em minutos.

2.1. Determine a altitude do ponto de onde foi lançado o balão.

2.2. Com que velocidade começou o balão a subir?

2.3. Determine a altitude máxima atingida pelo balão.

3. Considere a figura onde está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$:



Suponha que $\overline{AD} = \overline{DB} = 1$ e que x designa a amplitude do ângulo CDB, com $x \in]0, 90^{\circ}[$.

3.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, em função de x, é dada por

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2}.$$

3.2. Prove que o perímetro do triângulo $[ABC]$, em função de x, é dado por

$$1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \sqrt{2 + 2\cos x}.$$

4. Numa determinada cidade surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença traduziu-se na expressão $P(t) = e^{0{,}4t-0{,}01t^2}$, onde $P(t)$ representa a **percentagem** de pessoas doentes t dias após o inicio do estudo da epidemia.

4.1. Qual era a percentagem da população doente quando se iniciou o estudo da epidemia?

4.2. Quando ocorreu o pior momento da epidemia? Qual era, nessa altura, a percentagem de doentes?

4.3. A epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de doentes é inferior a 1. Determine ao fim de quanto tempo a epidemia foi erradicada.

FIM