



**Provas de Acesso ao Ensino Superior
Para Maiores de 23 Anos**

Candidatura de 2014

Exame de Matemática

Tempo para realização da prova: 2 horas

Tolerância: 30 minutos

Material necessário:

- Material de escrita.
- Máquina de calcular científica (não gráfica).

A prova é constituída por dois grupos, I e II.

- O grupo I inclui 7 questões de escolha múltipla.
 - Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correta.
 - Se apresentar mais do que uma resposta ou se a resposta for ilegível, a questão será anulada.
 - Não apresente cálculos nem justificações.
 - Escreva na folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera correta.
- O grupo II inclui 4 questões de resposta aberta.
 - Nas questões deste grupo apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efetuar e todas as justificações necessárias.

Cotações

Grupo I 70

Cada resposta certa10

Grupo II130

1.20

1.1.....5

1.2.....10

1.3.....5

2.30

2.1.....15

2.2.....10

2.3.....5

3.45

3.1.....15

3.2.....10

3.3.....20

4.35

4.1.....15

4.2.....20

Formulário

Área de figuras planas:

- Triângulo: $\frac{Base \times Altura}{2}$
- Losango: $\frac{Diagonal\ Maior \times Diagonal\ Menor}{2}$
- Trapézio: $\frac{Base\ Maior + Base\ Menor}{2} \times Altura$
- Círculo: πr^2 ; r raio

Perímetro de figuras planas:

- Circunferência: $2\pi r$; r raio

Volumes:

- Paralelepípedo retângulo: $Área\ da\ base \times Altura$
- Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ Base \times Altura$
- Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ Base \times Altura$
- Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$; r raio

Progressões:

Termo de ordem n de uma progressão de razão r :

- Aritmética: $u_n = u_1 + (n - 1)r$
- Geométrica: $u_n = u_1 r^{n-1}$

Soma dos n primeiros termos de uma progressão de termo geral u_n e razão r :

- Aritmética: $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- Geométrica: $S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} (r \neq 1)$

Regras de Derivação:

- | | | |
|--|--|--|
| • $(u \pm v)' = u' \pm v'$ | • $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ | • $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| • $(uv)' = u'v + uv'$ | • $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$ | • $(e^u)' = u'e^u$ |
| • $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | • $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$ | • $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ |

Razões Trigonométricas de Ângulos Agudos:

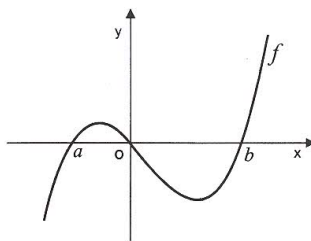
α	$\text{sen } \alpha$	$\cos \alpha$	$\text{tg } \alpha$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-

Fórmulas trigonométricas

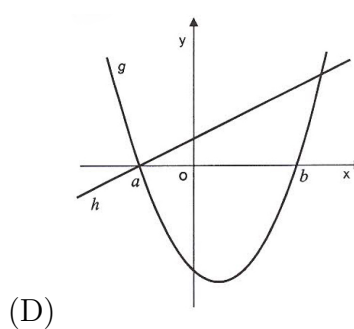
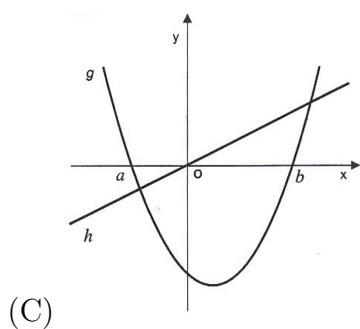
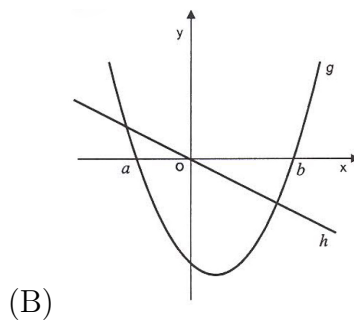
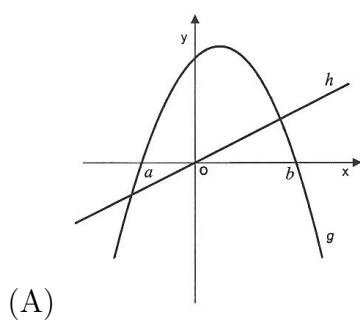
- $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen } x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
- $\text{tg}(2x) = \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$

Grupo I

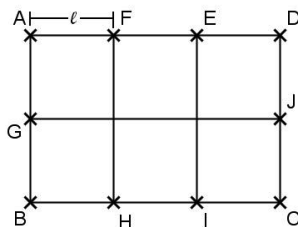
1. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R}



Em qual das figuras seguintes poderá estar representada parte dos gráficos de duas funções, g e h , de domínio \mathbb{R} , tais que $f = g \times h$?



2. Seis quadrados de lado ℓ formam a figura



O perímetro do triângulo $[BEC]$ é:

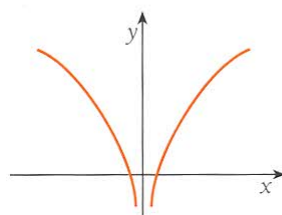
- (A) $(2 + \sqrt{5} + \sqrt{8}) \ell$ (B) $(3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}) \ell$
 (C) $(3 + \sqrt{8} + \sqrt{2}) \ell$ (D) $(3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{5}) \ell$

3. Uma instituição bancária oferece uma taxa de juro de 5% ao ano para depósitos numa certa modalidade, com capitalização de juros, isto é, no final de cada ano, o juro obtido é adicionado ao capital existente, sendo a taxa de juro, no ano seguinte, aplicada sobre esse valor.

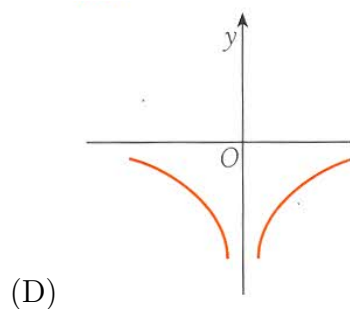
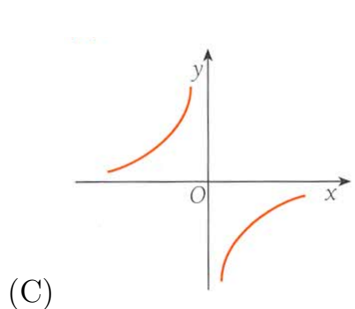
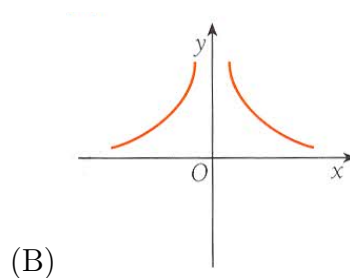
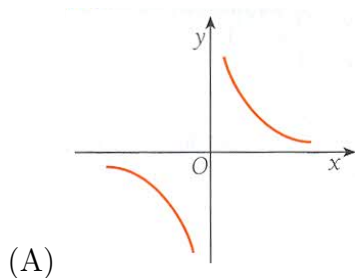
Um cliente desse banco fez um depósito de 4 000 euros, nessa modalidade.

Qual é, em euros, o capital desse cliente, relativo a esse depósito, passados 6 anos?

- (A) 5240.24 (B) 5360.38
- (C) 5435.72 (D) 5105.13
4. Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = \ln(x)$. Então $f(\frac{e}{x}) + f(ex)$ é igual a:
- (A) $\ln(\frac{e}{x} + ex)$ (B) $\ln(\frac{e}{x}) \times \ln(ex)$
- (C) 1 (D) 2
5. Na figura seguinte está representada parte da representação gráfica de uma função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g' , derivada de g ?



6. A derivada da função h , definida por $h(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$, é:

(A) $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$ (B) $-\frac{1}{(1 - \sin x)^2}$

(C) $\frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$ (D) $\frac{1}{1 - \sin x}$

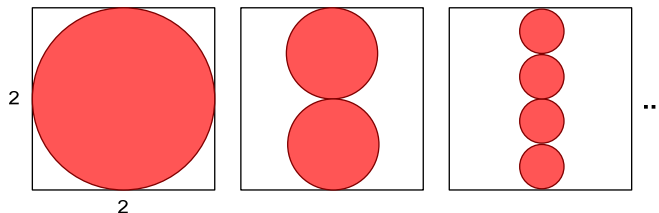
7. Simplificando-se a expressão $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ obtém-se:

(A) $\frac{4\sqrt{3} + 3}{9}$ (B) $\frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$

(C) $\sqrt{3} + \frac{1}{3}$ (D) $4\sqrt{3} + \frac{1}{3}$

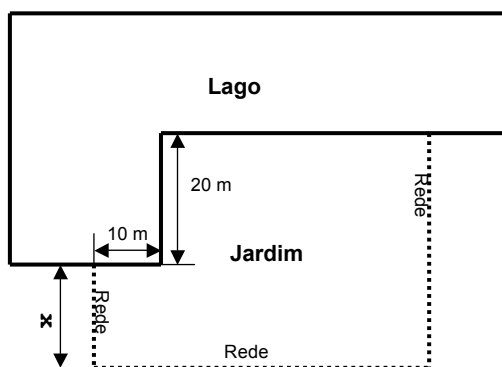
Grupo II

1. Considere a seguinte sequência de figuras, em que os três primeiros termos estão representados abaixo. O quadrado tem 2 cm de lado.



Em cada quadrado da sequência, todos os círculos sombreados têm o mesmo raio.

- 1.1. Indique o número de círculos sombreados na 5ª figura da sequência.
 - 1.2. Seja a_n a sucessão do valor da área de **cada círculo colorido** em cada uma das figuras. Determine o **termo geral** da sucessão a_n .
 - 1.3. Seja b_n a sucessão dos valores das áreas brancas nas diversas figuras. Determine o **termo geral** da sucessão b_n .
2. Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme ilustra a figura.
- Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede.
 - Os lados consecutivos do jardim têm de ser sempre perpendiculares.
 - As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros.
 - Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim.
 - Vão ser utilizados, na totalidade, 100 metros de rede.



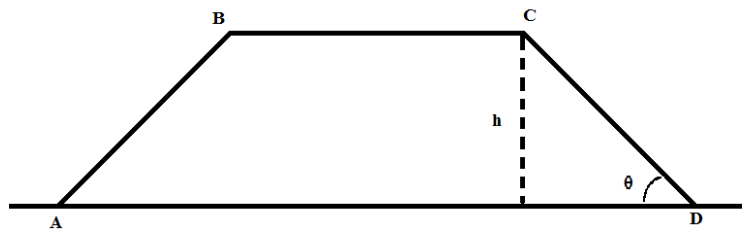
- 2.1. Mostre que a área do jardim, em m^2 , é dada em função de x por:

$$f(x) = -2x^2 + 40x + 1400.$$

- 2.2. Sem recorrer à calculadora, determine:

- a) o valor de x para o qual é máxima a área do jardim;
- b) a área máxima.

3. A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2 \text{ dm}$.



Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC , onde $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

- 3.1. Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior do trapézio em função de θ .
- 3.2. Mostre que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm^2 , por:

$$A(\theta) = 4 \sin \theta + 2 \sin(2\theta).$$

- 3.3. Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área.

4. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes. Admita que, t anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{2000}{1 + ke^{-0,13t}}$$

onde k designa um número real.

- 4.1. Determine o valor de k , supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago.
- 4.2. Admita agora que $k = 24$. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar cálculos numéricos, resolva analiticamente o problema:

Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.

Notas:

- 1) Se em cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve no mínimo três casas decimais.
- 2) Apresente os cálculos efetuados.

FIM