Provas de Acesso ao Ensino Superior

Para Maiores de 23 Anos

Candidatura de 2009

Exame de Matemática

Tempo para a realização da prova: 2 horas
Tolerância: 30 minutos

Material necessário:

- Material de escrita.
- Máquina de calcular científica (não gráfica).

A prova é constituída por dois grupos, I e II.

- O grupo I inclui 7 questões de escolha múltipla.
  - Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correcta.
  - Se apresentar mais do que uma resposta ou se a resposta for ilegível, a questão será anulada.
  - Não apresente cálculos nem justificações.
  - Escreva na folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera correcta.
- O grupo II inclui 4 questões de resposta aberta.
  - Nas questões deste grupo apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efectuar e todas as justificações necessárias.

Cotações

Grupo I 70

Cada resposta certa 10

Grupo II 130

1. 30
1.1 5
1.2 10
1.3 10
1.4 5
2. 40
2.1 5
2.2 10
2.3 15
2.4 10

3. 30
3.1 15
3.2 15
4. 30
4.1 10
4.2 20

Formulário

Área de figuras planas:

- Triângulo: $\frac{Base \times Altura}{2}$
- Losango: $\frac{Diagonal\ Maior \times Diagonal\ Menor}{2}$
- Trapézio: $\frac{Base\ Maior + Base\ Menor}{2} \times Altura$
- Círculo: πr^2; r raio

Perímetro de figuras planas:

- Circunferência: $2\pi r$; r raio

Volumes:

- Paralelepípedo rectângulo: $Área\ da\ base \times Altura$
- Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ $Área\ \ da\ Base \times Altura$
- Cone: $\frac{1}{3} \times$ $Área\ \ da\ Base \times Altura$
- Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$; r raio

Progressões:

Soma dos n primeiros termos de uma progressão de termo geral u_n e razão r:

- Aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$
- Geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ $(r \neq 1)$

Regras de Derivação:

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- $(\sin u)' = u' \cos u$
- $(\cos u)' = -u' \sin u$
- $(tg\ u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Razões Trigonométricas de Ângulos Agudos:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\ \alpha$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-

Grupo I

1. Seja g uma função contínua de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que :

g tem **mínimo absoluto** igual a 3, para $x = 2$

g tem **máximo absoluto** igual a 7, para $x = 5$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função g é crescente em [2,5].

(B) O contradomínio de g é [3,7].

(C) A função g tem derivada nula em $x = 2$ e em $x = 5$.

(D) A função g tem pelo menos um zero.

2. Na figura seguinte está representada uma embalagem de sumo de fruta, com a forma de um paralelepípedo de base quadrangular, cujo volume é de 2 dm^3.

Indique qual das funções seguintes dá a área total da embalagem, em dm^2, em função do comprimento x, em dm, da aresta da base.

(A) $A(x) = \frac{2x^3+8}{x}$ (B) $A(x) = 2x^2 + 8x$

(C) $A(x) = 2 + 8x$ (D) $A(x) = \frac{6x^3+2}{x^2}$

3. De uma função f sabe-se que $f(x) + f''(x) \neq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f?

(A) x^3 $(B) \sin x$

(C) $\cos x$ (D) e^x

4. O domínio da função f definida por $f(x) = \ln(2 + x - x^2)$ é:

(A) $\mathbb{R}$ (B) $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

(C) $]0, +\infty[$ (D) $]-1, 2[$

5. O tom de uma nota musical é determinado pela frequência da vibração que a gerou.

A sequência das frequências das oitavas acima e abaixo do Dó médio do piano são valores tais que o quociente de dois consecutivos é constante.

Considere a seguinte tabela:

Nº de oitavas acima do Dó médio	0	1	2	3	4
Frequência (em hertz)	263	526	1052	2104	4208

Qual a frequência de duas oitavas abaixo do Dó médio?

(A) 32,875 hertz (B) 131,5 hertz

(C) 65,75 hertz (D) 16,4375 hertz

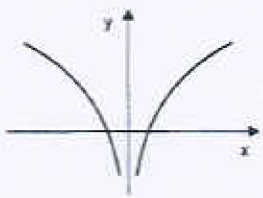
6. Considere a função real de variável real h tal que $h(x) = e^{x^2}$.

Indique qual das seguintes expressões define a função h'.

(A) $2xe^{x^2}$ (B) $2xe^{2x}$

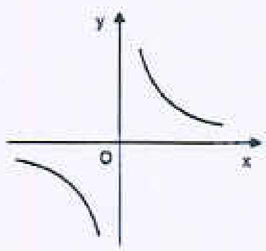
(C) e^{x^2} (D) e^{2x}

7. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

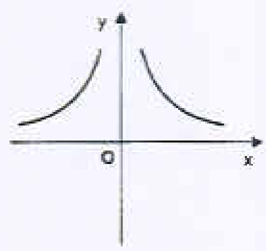


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g'?

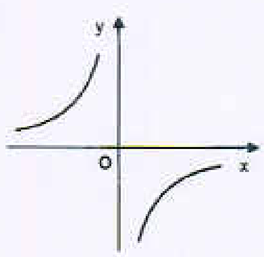
(A)



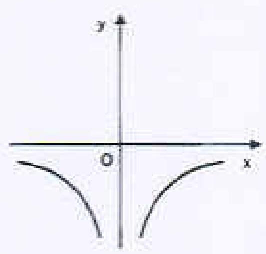
(B)



(C)

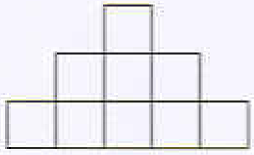


(D)



Grupo II

1. Pretende-se colocar um conjunto de caixas numa pilha, de modo que cada linha tenha menos duas caixas do que a anterior e a pilha termine com apenas uma caixa, como sugere a figura.



Cada caixa tem a forma de um cubo. A contagem das linhas da pilha é feita a partir do topo.

1.1. Mostre que $a_n = 2n - 1, n \geq 1$, é um modelo linear que indica o número de caixas na linha n.

1.2. Numa pilha com 10 linhas, determine o número de caixas colocadas na base, e o número total de caixas colocadas na pilha.

1.3. Supondo que se pretende empilhar 900 caixas, determine o número de caixas que deve ter a base.

1.4. Admitindo que cada caixa tem 12 cm de aresta, determine a altura da pilha construída com 900 caixas.

2. A eficácia de dois analgésicos A_1 e A_2, de duas marcas distintas, é expressa, numa determinada escala, em função do tempo, pelas expressões:

$$A_1(t) = -4t^2 + 8t$$

$$A_2(t) = -1,8t^3 + 5,4t$$

onde t representa o número de horas após o medicamento ter sido administrado.

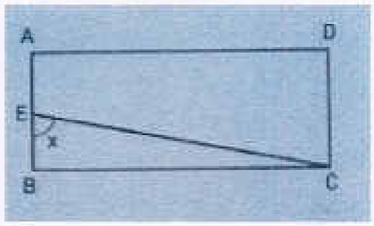
2.1. Determine a eficácia do analgésico A_1, quinze minutos após ter sido administrado.

2.2. Ao fim de quanto tempo o analgésico A_1 atinge a sua maior eficácia?

2.3. Ao fim de quanto tempo o analgésico A_2 atinge a sua maior eficácia?

2.4. O fabricante do analgésico A_1 afirma que o seu produto tem maior eficácia do que o A_2. Comente, justificando, esta afirmação.

3. Considere a seguinte figura:



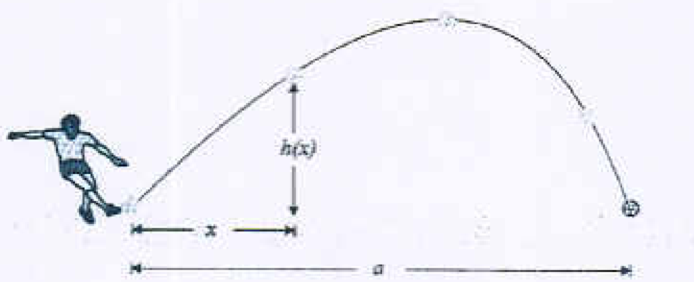
Suponha que $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{EC} = 6$ cm e que x designa a amplitude, em graus, do ângulo BEC.

3.1. Determine o comprimento (em cm) de $[AB]$, se x medir 60^o.

3.2. Prove que a área do rectângulo $[ABCD]$, em função de x, é dada (em cm^2) por

$$72 \sin x \cos x$$

4. Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada.



Considere a função h definida em $[0, 8[$ por

$$h(x) = 2x + 10 \ln(1 - 0,1x)$$

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, que a bola atinge, relativamente ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

NOTA: Apresente os resultados arredondados às centésimas.

4.1. Determine a altura da bola, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a 7 metros do local onde foi pontapeada.

4.2. Recorrendo à derivada da função h, determine a altura máxima que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada.

FIM