



**Provas de Acesso ao Ensino Superior  
Para Maiores de 23 Anos**

**Candidatura de 2013**

**Exame de Matemática**

Tempo para realização da prova: 2 horas  
Tolerância: 30 minutos

**Material necessário:**

- Material de escrita.
- Máquina de calcular científica (não gráfica).

**A prova é constituída por dois grupos, I e II.**

- O grupo I inclui 7 questões de escolha múltipla.
  - Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correta.
  - Se apresentar mais do que uma resposta ou se a resposta for ilegível, a questão será anulada.
  - Não apresente cálculos nem justificações.
  - Escreva na folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera correta.
- O grupo II inclui 4 questões de resposta aberta.
  - Nas questões deste grupo apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efetuar e todas as justificações necessárias.

**Cotações**

Grupo I ..... 70

Cada resposta certa .....10

Grupo II .....130

**1.** .....40

1.1.....10

1.2.....20

1.3.....10

**2.** .....40

2.1.....5

2.2.....10

2.3.....25

**3.** .....20

3.1.....10

3.2.....10

**4.** .....30

4.1.....10

4.2.....8

4.3.....12

---

## Formulário

### Área de figuras planas:

- Triângulo:  $\frac{Base \times Altura}{2}$
- Losango:  $\frac{Diagonal\ Maior \times Diagonal\ Menor}{2}$
- Trapézio:  $\frac{Base\ Maior + Base\ Menor}{2} \times Altura$
- Círculo:  $\pi r^2$ ;  $r$  raio

### Perímetro de figuras planas:

- Circunferência:  $2\pi r$ ;  $r$  raio

### Volumes:

- Paralelepípedo retângulo:  $Área\ da\ base \times Altura$
- Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ Base \times Altura$
- Cone:  $\frac{1}{3} \times Área\ da\ Base \times Altura$
- Esfera:  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ;  $r$  raio

### Progressões:

Termo de ordem  $n$  de uma progressão de razão  $r$ :

- Aritmética:  $u_n = u_1 + (n - 1)r$
- Geométrica:  $u_n = u_1 r^{n-1}$

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão de termo geral  $u_n$  e razão  $r$ :

- Aritmética:  $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- Geométrica:  $S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} (r \neq 1)$

### Regras de Derivação:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| • $(u \pm v)' = u' \pm v'$                 | • $(u^n)' = nu^{n-1}u'$                  | • $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| • $(uv)' = u'v + uv'$                      | • $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$  | • $(e^u)' = u'e^u$                               |
| • $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | • $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$ | • $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$                      |

---

## Razões Trigonométricas de Ângulos Agudos:

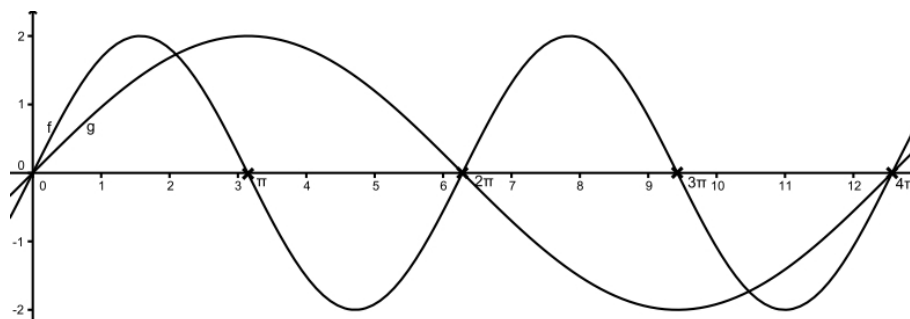
$\alpha$	$\text{sen } \alpha$	$\cos \alpha$	$\text{tg } \alpha$
$0^\circ$	0	1	0
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^\circ$	1	0	-

## Fórmulas trigonométricas

- $\text{sen}(2x) = 2 \text{sen } x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
- $\text{tg}(2x) = \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$

## Grupo I

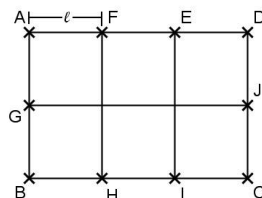
1. Considere, no intervalo  $[0, 4\pi]$ , a onda  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ , com  $f(x) = 2\sin x$  e  $g(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ . Recorrendo ao gráfico, os valores da variável independente em que  $\varphi$  é **positiva** são:



Então:

- (A)  $\left]0, \frac{2}{3}\pi \right[ \cup \left]2\pi, \frac{10}{3}\pi \right[$  (B)  $]0, 2\pi[$   
 (C)  $\left]0, \frac{2}{3}\pi \right[ \cup \left]\frac{10}{3}\pi, 4\pi \right[$  (D)  $\left]\frac{2}{3}\pi, 3\pi \right[$

2. Seis quadrados de lado  $\ell$  formam a figura



A **área** do quadrilátero convexo de vértices  $[GHJE]$  é:

- (A)  $\sqrt{6} \ell^2$  (B)  $3 \ell^2$   
 (C)  $3\sqrt{2} \ell^2$  (D)  $\frac{3}{2} \ell^2$
3. Uma instituição bancária oferece uma taxa de juro de 8% ao ano para depósitos numa certa modalidade.  
 Um cliente desse banco fez um depósito de 10 000 euros, nessa modalidade.  
 Qual é, em euros, o capital desse cliente, relativo a esse depósito, passados  $n$  anos?
- (A)  $10000 + 0,8n$  (B)  $10000 \times 1,08n$   
 (C)  $10000 \times 1,8n$  (D)  $10000 \times 1,08^n$

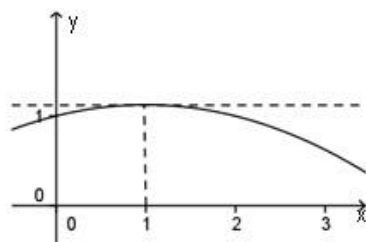
4. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real  $x \in ]-3, +\infty[$ , igual a  $9^{1+\log_3 \sqrt{x+3}}$ ?

(A)  $9\sqrt{x+3}$  (B)  $9 + 2\log_3 \sqrt{x+3}$

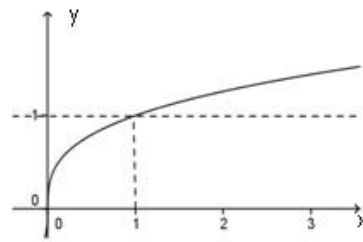
(C)  $9x + 27$  (D)  $9 + \frac{1}{2}(x+3)$

5. Seja  $f$  uma função crescente em  $]0, 3[$ , com  $f(0) = 1$  e  $f'(1) = 0$ .

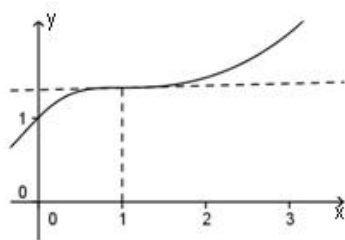
Qual dos seguintes gráficos poderá ser a função  $f$ ?



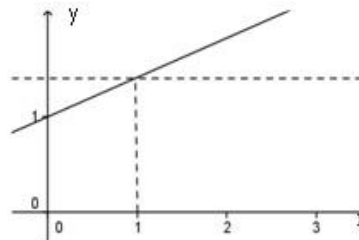
(I)



(II)



(III)



(IV)

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

6. A derivada da função  $h$ , definida por  $h(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - x)}$ , é:

(A)  $\frac{1}{\cos x - 1}$

(B)  $\frac{\cos x - \cos(2x)}{(1 - \cos x)^2}$

(C)  $\frac{\cos x}{1 - \cos x} + \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x}\right)^2$

(D)  $-1 + \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x}\right)^2$

7. Simplificando-se a expressão  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$  obtém-se:

(A)  $8 + \sqrt{15}$

(B)  $1 - \sqrt{15}$

(C)  $3 + \sqrt{15}$

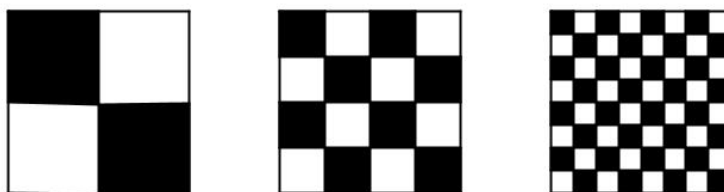
(D)  $4 + \sqrt{15}$

## Grupo II

1. Seja  $Q_1$  um quadrado de lado  $l$  unidades de medida, onde se divide cada um dos lados pelos pontos médios unindo-os.

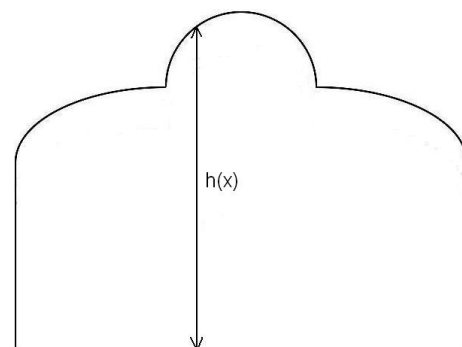
Construa-se  $Q_2$  a partir de  $Q_1$ , unindo os pontos médios dos lados dos quadrados obtidos em  $Q_1$ .

Construa-se  $Q_n$  a partir de  $Q_{n-1}$  ( $n > 2$ ) repetindo, em cada um dos quadrados, a construção indicada. Em cada uma das figuras obtidas pinte-se alternadamente os quadrados interiores.



- 1.1. Quantos quadrados brancos há em  $Q_5$ ? Justifique.
- 1.2. Sendo  $x_n$  o número de quadrados brancos em  $Q_n$  e  $a_n$  a área de **cada um desses** quadrados brancos. Apresente os respectivos termos gerais ( $x_n$ ) e ( $a_n$ ).
- 1.3. Seja  $b_n$  a área total branca em cada um dos termos da sucessão. Indique, justificando, o termo geral de  $b_n$ .
2. Na entrada de um túnel, existe um arco decorado assente em dois pilares de igual altura. A altura do arco a  $x$  metros de distância do pilar da esquerda é dada, em metros, por:

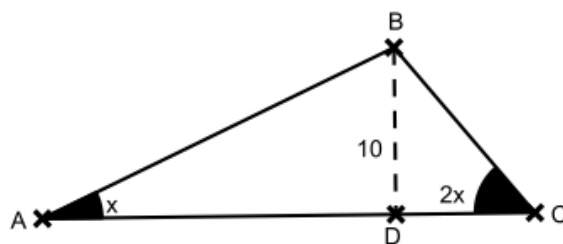
$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 8 + \sqrt{8x - x^2} \right), & 0 \leq x < 4 \\ 6 + \sqrt{-32 + 12x - x^2}, & 4 \leq x < 8 \\ \frac{1}{2} \left( 8 + \sqrt{-48 + 16x - x^2} \right), & 8 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



- 2.1. Mostre que  $h(0) = 4$  e interprete o resultado.
- 2.2. Indique a altura máxima do arco.
- 2.3. Indique, justificando, o intervalo em que a altura do arco é superior ou igual a 5 metros.

3. Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$ . Tem-se que:

- $x$  designa a amplitude do ângulo  $BAC$ ;
- a amplitude do ângulo  $BCA$  é igual ao dobro da amplitude do ângulo  $BAC$ ;
- a altura  $\overline{BD}$  é igual a 10.

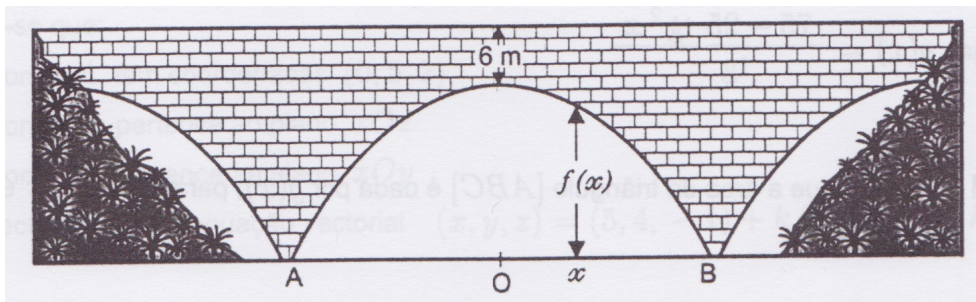


3.1. Mostre que a área do triângulo  $ABC$  é dada por  $g(x) = \frac{75 - 25 \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$ , para qualquer  $x \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ .

3.2. Considere o triângulo  $[ABC]$  quando  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por  $g(x)$ .

4. A figura representa uma ponte sobre um rio.



A distância mínima do **arco central** da ponte ao tabuleiro é 6 metros.

Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção do **arco central** da ponte com o nível da água do rio, e seja  $O$  o ponto médio de  $[AB]$ .

Considere a reta  $AB$  como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto  $O$  e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto situado entre  $A$  e  $B$ , de abscissa  $x$ , a altura do arco, em metros é dada por

$$f(x) = 36 - 9(e^{0,06x} + e^{-0,06x})$$

- 4.1. Recorrendo ao estudo da derivada da função  $f$ , mostre que, tal como a figura sugere, é no ponto de abscissa zero que a altura do arco é máxima.
- 4.2. Uma empresa está a estudar a hipótese de construir uma barragem neste rio. Se tal empreendimento se concretizasse, o nível das águas no local da ponte subiria 27 metros. Nesse caso, a ponte ficaria totalmente submersa? Justifique a resposta.
- 4.3. Mostre que a distância, em metros, entre  $A$  e  $B$  é um valor compreendido entre 43 e 44.

**FIM**